

# **Evaluering af matematiske kompetencer**

*Kristine Jess*

**Rapport over udviklingsarbejde**

KDAS og CVU-Stork 2005/2006

Forord .....	3
Baggrund for projektet .....	4
Afgrensning af dette delprojekt.....	5
Fornyset aktualisering af projektet .....	6
Metode.....	7
Teoretisk perspektivering .....	8
Generelle resultater af testning/evaluering i matematik.....	8
Forskning i evaluering af kompetencer .....	9
Feltarbejde .....	11
Første forløb på SPF.....	11
Indtryk fra forløbet.....	12
Forløbet set med kompetencebriller .....	14
Andet forløb på SPF.....	17
Første forløb med lærerstuderende .....	18
Begrundelse for at inddrage de lærerstuderende.....	18
Bemærkninger til forløbet .....	19
Lærerstuderende på SPF.....	19
Introduktion, forberedelse.....	19
Analyse af interviews .....	20
Dagholdets forslag til evalueringsformer .....	24
Andet forløb med lærerstuderende.....	25
Evaluering af kompetencer – hvordan?.....	25
Afsluttende bemærkninger .....	27
Litteraturliste.....	29

## **Forord**

Først vil jeg sige tak til Morten Blomhøj, Roskilde Universitet, RUC; Mikael Skånstrøm, Statens Pædagogiske Forsøgscenter, SPF; og Simon Cort Graae, Københavns- Dag og Aftenseminarium, KDAS; for deres bidrag til projektets gennemførelse. Uden Morten Blomhøjs indsats havde ansøgningen ikke fået den kvalitet, som formodentlig var forudsætningen for, at projektet blev en realitet. Desuden har Morten deltaget i forløbet på SPF og i diskussioner om evaluering af matematiske kompetencer. Mikael Skånstrøm har for det første ladet os deltage i sin undervisning, og tillige har han deltaget i de løbende diskussioner. Han har også været medvirkende til, at jeg kunne få samlet empiri i form af kopier af plancher og mat-log'er, samt været en god støtte ved gennemførelsen af interviewene. Mikael har bidraget til rapporten med en beskrivelse af forløbet på SPF og givet feedback på den foreliggende rapport. Simon Cort Graae har velvilligt tilrettelagt sin undervisning, så hans daghold på KDAS kunne indgå i projektet på et tidspunkt, der lå i forlængelse af forløbet på SPF, og således at vi kunne undgå for langt et tidsmæssigt spring, før de studerende fra KDAS kunne gennemføre interviewene på SPF. Samtidig har Simon været en god sparringspartner under forløbet med hans hold.

Projektet om "udvikling og evaluering af matematikkompetencer" blev gennemført i det akademiske år 2005/06 med økonomisk støtte fra CVU-Storkøbenhavn.

## **Baggrund for projektet**

I 2000 blev der på initiativ fra Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeriet nedsat en arbejdsgruppe under ledelse af professor Mogens Niss, IMFUFA Roskilde Universitet. Gruppen, der havde repræsentanter fra alle niveauer af uddannelsessystemet, fik som kommissorium blandt andet at give en generel bestemmelse af målene for matematikundervisning på uddannelsessystemets forskellige trin i termer af matematiske kompetencer. Arbejdet resulterede i KOM-rapporten (2002), der identificerer og beskriver otte kompetencer, som tilsammen hævdes at indfange matematisk kompetence.

Systemet af kompetencer kan kort beskrives således:

1. **Tankegangskompetence:** At kunne udøve matematisk tankegang
2. **Problembehandlingskompetence:** At kunne formulere og løse matematiske problemer
3. **Modelleringskompetence:** At kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter
4. **Ræsonnementskompetence:** At kunne ræsonnere matematisk
5. **Repræsentationskompetence:** At kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold
6. **Symbol- og formalismekompetence:** At kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme
7. **Kommunikationskompetence:** At kunne kommunikere i, med, og om matematik
8. **Hjælpemiddelskompetence:** At kunne omgås hjælpemidler for matematisk virksomhed

KOM- rapportens system af otte kompetencer og den kompetencebaseret beskrivelse af mål for matematikundervisning på forskellige trin af uddannelsessystemet har været genstand for betydelige interesse. Det gælder både i det matematikdidaktiske forskningsmiljø, i forbindelse med udvikling af internationale tests (matematikundersøgelsen i PISA 2003 har således dette kompetencesystem som en del af sin basis) og ved udvikling af nationale curricula og tilhørende nationale prøvesystemer (KOM-projektet er f.eks. hovedinspirationen til i aktuelle reformer i Norge og Tyskland).

I en dansk sammenhæng kan den kompetencebaserede beskrivelse af matematikundervisning på grundskoleniveau ses som et muligt svar på udfordringen med at bestemme en kernefaglighed i de enkelte fag. En bestræbelse, der har haft regeringens interesse siden 2001, hvor internationale undersøgelser, frem for alt PISA, målte danske grundskoleelevers beherskelse af matematik, dansk og naturvidenskab til en beskedent og utilfredsstillende placering på ranglisterne, selvom danske elever i matematik lå i gruppen lige over gennemsnittet.

“...Internationale undersøgelserne viser, at danske elever gennemgående er glade for skolen, at de ser på de faglige udfordringer med betydelig selvtillid, og at de på mange felter har et godt afsæt til at leve og handle i et demokratisk samfund. Men samtidig er der tydelige tegn på, at uddannelsessystemet på centrale faglige områder ikke lever op til forventningerne.” (Uddannelsesstyrelsen 2004)

Hvad angår grundskolens matematikundervisning er indholdsbestemmelsen, der ligger i de Centrale Kundskabs- og Færdighedsområder i den gældende bekendtgørelse, på flere punkter i harmoni med en kompetencebaseret beskrivelse.

På det gymnasiale område kan man i de nye bekendtgørelser, der trådte i kraft i skoleåret 2005/2006 med den nye gymnasireform, også se tydelige spor af en kompetencebaseret bestemmelse af undervisningens mål og indhold, uden at der dog er tale om en gennemgribende ændring af traditionen for tæt emnemæssig beskrivelse af undervisningens indhold.

I læreruddannelsen er de centrale kundskabs- og færdighedsområder allerede beskrevet i termer af matematiske kompetencer, og kompetencebegrebet spiller mange steder en fremtrædende rolle i behandlingen af matematikdidaktiske problemstillinger som f.eks. begrundelsesproblemet og matematisk modellering.

Identifikation og beskrivelse af centrale faglige kompetencer, som det er sket i KOM-projektet, kan således være et væsentligt bidrag til et teoretisk grundlag for reformbestræbelser, der sigter på at styrke fagligheden i matematikundervisningen på en sådan måde, at matematikken bliver brugbar for eleverne. Det er netop dette potentiale, der afspejles i den store interesse for KOM-projektet både i Danmark og internationalt.

Det er imidlertid oplagt, at der er lang vej fra, at matematikundervisningens mål på et givet niveau er beskrevet i termer af matematiske kompetencer, og til at undervisningen faktisk bliver tilrettelagt med henblik på at støtte udviklingen af disse kompetencer, samt til at elevernes udbytte af undervisningen evalueres på en måde, der gør det muligt at vurdere elevernes besiddelse af de enkelte kompetencer. Her er tale om mere end blot og bart et implementeringsproblem, idet der kan identificeres et genuint forsknings- og udviklingsbehov angående en række forskningsspørgsmål i forbindelse med kompetencebegrebet anvendelse i praksis. Der gælder ikke mindst følgende tre centrale spørgsmål:

1. Hvordan kan man på forskellige trin i uddannelsessystemet tilrettelægge og gennemføre undervisningsforløb, der støtter udviklingen af de enkelte matematiske kompetencer?
2. Hvordan og i hvilket omfang kan man i tilknytning til sådanne forløb evaluere elevernes udbytte af undervisningen specifikt i forhold til enkelte kompetencer?
3. Hvilke krav følger af svarene på (1) og (2) vedrørende lærerens matematiske, matematikdidaktiske og pædagogiske kompetencer, og hvordan kan disse krav imødekommes?

### **Afgrænsning af dette delprojekt**

I denne del af projektet forsøges spørgsmål 2 besvaret.

Af ressourcemæssige grunde fokuseres på to af de otte kompetencer. Det drejer sig om følgende:

- modelleringskompetence
- problemløsningskompetence

Disse to kompetencer er udvalgt, fordi de er tæt forbundne, hvilket har medført, at de i CKF for læreruddannelsen er samlet i ét punkt, og fordi de tilsammen udgør en væsentlig del af den kernefaglighed, der er problematisk at støtte udviklingen af i matematikundervisning på grundskolens ældste klassetrin og i læreruddannelsen. Det skal dog understreges, at det forhold, at de nævnte to kompetencer står i centrum for opmærksomheden, ikke indebærer, at de øvrige lades ude af betragtning. De optræder som "hjælpetropper" i efterstræbelsen af de to kompetencer, som er i fokus.

Som en anden afgrænsning af projektets undersøgelser inddrages kun matematikundervisning på 8. klassetrin i grundskolen og i linjefaget matematik i læreruddannelsen.

### **Fornyset aktualisering af projektet**

For så vidt hovedtrækkene af ansøgningen fra foråret 2005. I mellemtiden er behovet for et sådant projekt blevet øget på grund af det store evalueringsprojekt for grundskolen, der har været i udbud, og som er gået i gang i august 2006.

Der har fra politisk hold på tværs af de fleste partier været rejst krav om mere og bedre testning/evaluering på grundskoleniveau. Måske kan det i forhold til de foreliggende planer om obligatorisk testning af trinmål i matematik efter 3. og 6. klasse have en funktion at undersøge og udtænke evalueringsformer, der kan indfange noget så kompliceret som tilegnelsen af matematiske kompetencer. I undervisningsministeriets udbudsmateriale til evalueringsprojektet er der ikke lagt op til, at alle trinmål kan evalueres med de obligatoriske computerbaserede test. Det er i sagens natur områder som "Kommunikation og problemløsning", altså netop de kompetencelignende trinmål, der ikke bliver inddraget i de computerbaserede og automatisk rettede tests.

Derfor er der en ekstra grund til at beskæftige sig med evaluering af matematiske kompetencer i et udviklingsprojekt som det foreliggende. Men hovedbegrundelsen er den udbredelse kompetencetænkningen – som tidligere beskrevet – har fået. Hvis de opstillede mål for matematik i fremtiden indeholder matematiske kompetencer, må det forventes, at tilegnelsen af disse kompetencer kan evalueres.

## Metode

Først afsøges litteraturen for etableret viden om evaluering i matematikundervisning af betydning for besvarelsen af spørgsmål 2. Dels generelt og dels specifikt omkring evaluering af noget tilsvarende de danske matematikkompetencer.

Herefter inddrages egen empiri. I denne er beskrevet to undervisningsforløb på Statens Pædagogiske Forsøgscenter (SPF). Det første omhandler 'Matematik Morgener', hvor produkterne fra forløbet senere analyseres med henblik på at vurdere egnetheden som evalueringsobjekter. Derefter beskrives et efterfølgende kort forløb, der efter vurdering af det første tilrettelægges med den hensigt at indfange elevernes kapacitet til kritisk at vurdere udformede modelleringsprocesser.

Der beskrives et forløb om 'Matematik Morgener', som gennemføres med lærerstuderende (daghold) på Københavns Dag- og Aftenseminarium (KDAS), hvor det er hensigten at få de studerende til at involvere sig i problematikken om evaluering af modelleringskompetencen. Interviews, som de lærerstuderende skal foretage af eleverne på SPF, bliver analyseret. Endelig diskuteres de forslag til evaluering af modelleringskompetence, som de studerende bidrager med på baggrund af deres deltagelse i forløbet.

Herefter inddrages et meritmatematikhold på læreruddannelsen i problematikken. De får som opgave at give deres forslag til evaluering af modellerings- og problemløsningskompetencen på baggrund af den indsigt, de får gennem at læse artiklen: 'Matematik Morgener' (Blomhøj og Skånstrøm 2002) og analysere plancher og matlog'er fra SPF samt båndudskrifter fra dagholdets interviews af eleverne tillige med eget arbejde med modelleringsprocesser.

Der er gode pædagogiske grunde til at lade de lærerstuderende indgå i dette undersøgelsesarbejde. Men ud over det, er det også med en forventning om, at især de meritstuderende vil kunne bidrage til at besvare spørgsmålet ud fra det høje faglige niveau, det pågældende hold befinder sig på.

## Teoretisk perspektivering

### Generelle resultater af testning/evaluering i matematik

I artikler om evaluering findes mange bidrag om opmærksomhedsfelter i forhold til evaluering i matematikundervisningen. Her påpeges behaviorismens indflydelse på den oprindelige udvikling af test/evaluering i matematik (Kilpatrick 1993, Keitel under udgivelse). Det dokumenteres, at evalueringsmetoder halter bagefter udviklingen i undervisningen, (Niss 1993, Ruthven 1994, Clarke 1996). Backwasheffektens (evalueringens tilbagevirkende effekt på undervisningen) hovedsagelig negative effekt på undervisningen på grund af mangelfulde evalueringsmetoder med et snævert og færdighedspræget indhold, der får en indsnævrende virkning på indholdet i undervisningen, er omtalt hos flere forfattere, især i forbindelse med egentlige testsystemer (Niss 1993, Clarke 1996, Jess 2004). Endnu en bieffekt af testning er, at det snævre evalueringsindhold bibringer elever/studerende en opfattelse af, hvad det er, der er det væsentlige i matematikundervisningen (Jess 2005). Dog kan evalueringsformer understøtte reformer i matematikundervisningen (Clarke 1996, Cooney 1993), og herhjemme er det formodentlig sket ved indførelsen af den mundtlige afgangsprøve efter 9. klasse i grundskolen (Jess 2005).

Barnes et al. har gennemført en stor undersøgelse i Australien, hvor de påviste backwasheffekten af obligatoriske summative evalueringer (Barnes et al. 2000). I USA blev der i 2005 offentliggjort resultater af en undersøgelse over konsekvenserne af den omfattende testning Bush-regeringen indførte i 2002 i forlængelse af "No child left behind"-loven. Konklusionen på undersøgelsen er, at der ikke er nogen tydelige beviser på, at det pres, som high-stakes-testningen (omfattende testning med væsentlige konsekvenser for alle implicerede) frembringer, fører til nogen forbedringer i elevernes præstationer (Nichols et. al (2005).

Vi kan lære af disse internationale forsøg og undersøgelser samt af det faktum, at Danmark ofte med nogle års forsinkelse bliver optaget af den dagsorden, der hersker i de store vestlige lande som England og USA, og vi må berede os på et større omfang af testning og være meget opmærksomme på de mulige faldgruber i forbindelse hermed. Det er tankevækkende, at netop den mundtlige gruppeprøve i matematik ved grundskolens afgangsprøve, der som nævnt har været et eksempel på en evalueringsform med en positiv backwasheffekt, nu ikke længere bliver obligatorisk. Ydermere må den ikke foregå som gruppeprøve, når den bliver udtrukket. Dermed bortfalder muligheden for at evaluere kommunikationsdelen i trinmålscategorien "Kommunikation og problemløsning". At de nye computergenererede trinmålstest også forventes at være svage på netop kompetencemål som "kommunikation og problemløsning", betyder, at evalueringen af kompetencemål må styrkes på anden vis.

Man må konkludere, at evaluering af de matematiske kompetencer udgør et problem, som bør tildeles særlig opmærksomhed. Dertil kommer, at vi har en international testtradition, som formodentlig er medvirkende til, at der i almindelighed eksisterer en opfattelse af, at testning i matematik er en enkel sag at udføre, idet et bestemt svar på en matematisk opgave ikke kan diskuteres, og derfor i modsætning til fx en skriftlig fremstilling er nem at vurdere – og vurdere retfærdigt.

Historisk har matematikundervisningen på dansk grundskoleniveau indtil nu ikke været domineret af test, hvilket har været i overensstemmelse med mange matematiklæreres ønske om at undgå disse ud fra et hensyn til elevernes personlige udvikling.



Men selv om der i Danmark har været en udbredt modstand mod test/evaluering, så er der efterhånden kommet en forøget opmærksomhed på, at evaluering kan bidrage til at kvalificere undervisningen samtidig med, at hensynet til eleven bevares. Måske er denne udvikling i overensstemmelse med Clarkes udtryk: "Put your prejudices to one side: Assessment is at the heart of educational endeavor ... Visit any school, the activity is evident. But, without reflection, the activity is unformed. Assessment embodies the reflective function of the educational process" (Clarke 1996, p. 327). Han fortsætter dog med at påpege, at effekterne af hidtidige evalueringer synes at lade vente på sig, og at evalueringsformerne sjældent har været informative.

Det er imidlertid min opfattelse, at hvis man kan få udviklet egnede evalueringsformer til evaluering af matematiske kompetencer, så vil de via backwasheffekten styrke matematikundervisningen i grundskolen og på senere uddannelsesniveauer. Og det må så blive et selvstændigt spørgsmål, hvordan denne type test kan tilpasses den politiske virkelighed i det danske uddannelsessystem.

### Forskning i evaluering af kompetencer

Generelt kan man sige, at forskningen i evaluering i matematik ikke er overvældende i omfang, og at der er behov for yderligere forskning på området, er et synspunkt, der går igen hos flere af de ovenfor nævnte forfattere. Man får et indtryk af status fra midthalvfemserne af Ruthven i hans gennemgang af bl.a. de to bøger (CAME og IAME<sup>1</sup>), der kom ud af ICMI's specielle studiegruppe netop i emnet "Assessment in Mathematics Education and Its Effects". I sin artikel "Better judgement: rethinking assessment in mathematics education" kommer Ruthven et enkelt sted ind på evaluering af kompetencer. Det var før den danske udgave af kompetencebeskrivelse i matematikundervisning var publiceret, men kompetencebegrebet havde været brugt tidligere og udvalgte kompetencer gennemsyrrer bl.a. de læseplaner (Standards), der var udkommet fra NCTM i USA omkring 1990. Ruthven skriver:

"One influential approach to moving beyond single summative judgement is the use of cognitive taxonomies deriving from the influential work led by Tyler and Bloom (Broomes and Halliday, CAME; Cheng and Lü, CAME; Kilpatrick, IAME; Weng and Zhang, CAME). Underlying the assessment process is an explicit matrix model of mathematical competence, cross-classified by subject content and intellectual process" (Ruthven 1994, p. 446).

Selv om der her ikke er tale om kompetencerne fra KOM-projektet, er tanken altså den samme med en række kompetencer, som kan udfolde sig på en række matematiske indholdsområder, hvilket er i tråd med det, der lægges op til i KOM-rapporten (s. 114). Ruthven finder en sådan løsning elegant, men:

"... it is now clear that there are important theoretical and practical weaknesses in this approach. In the first place, the conceptualization of process in the model seems to rest on a questionable transposition from logical categories to cognitive abilities; indeed, even the logical model has been criticised as matching poorly (Kilpatrick, IAME). Equally, there are considerable problems in operationalising the model adequately: poor

<sup>1</sup> CAME = Niss, M (1993b): Cases of Assessment in Mathematics Education, Kluwer, Dordrecht  
IAME = Niss, M (1993a): Investigations into Assessment in Mathematics Education, Kluwer, Dordrecht.

agreement between experts in assigning items to cells; inconsistent patterns of response to items across content areas, but not within process levels across content areas (Bodin, IAME; Broomes and Halliday, CAME; Kilpatrick, IAME). In the face of these inadequacies, the influence of this approach seems to be waning” (Ruthven 1994, p. 446).

Her er et væsentligt element i kompetencetænkningen, hvis evaluering af kompetencer i forhold til faglige områder falder forskelligt ud. Det sætter spørgsmålstegn ved, om man i det hele taget kan ‘lære’ kompetencer som sådan. Selv om de kompetencer, som der arbejdes med i denne rapport, KOM-gruppens kompetencer, er formuleret på en lidt anden måde, så kan man altså ud fra disse undersøgelser forvente en del problemer med såvel validitet og reliabilitet i måling af kompetencetilegnelse.

KOM-rapportens løsning på problemet er, at man skal se på tre dimensioner i forbindelse med enhver kompetence, idet der (s. 64-65) opereres med, at en persons besiddelse af kompetence kan antage tre dimensioner:

- En kompetences *dækningsgrad* hos en person benyttes til at betegne i hvor høj grad de *aspekter*, som karakteriserer kompetencen, er dækket hos den pågældende, dvs. hvor mange af disse aspekter, der kan aktiveres i foreliggende situationer og i hvor høj grad aktiveringen sker selvstændigt. Fx er det at kunne udtænke beviser udtryk for en større dækningsgrad af ræsonnementskompetencen, end hvis man blot er i stand til at forstå andres beviser.
- En kompetences *aktionsradius* hos en person udgøres af det spektrum af *sammenhænge og situationer* personen kan aktivere kompetencen i. Det drejer sig både om sammenhænge bestemt af matematiske emneområder, men også sammenhænge og situationer, der er bestemt af problemstillinger og udfordringer.

Hvis en persons problemløsningskompetence kan aktiveres med succes både inden for algebra, geometri og sandsynlighedsregning, har den større aktionsradius end hos en person, der kun kan aktivere den med succes inden for geometri. Tilsvarende har modelleringskompetencen en større aktionsradius hos en person, som kan håndtere anvendelser af matematik i forhold til økonomiske forhold i privatlivet herunder fx beregning af restskat og låneomkostninger end hos den, der kun kan aktivere kompetencen ved indkøb.

- En kompetences *teknisk niveau* hos en person bestemmes af hvor *begrebsligt og teknisk avancerede* sagsforhold og værktøjer en person kan aktivere den pågældende kompetence overfor. Fx har symbol- og formalisme kompetencen et lavere niveau hos en person, der kan regne med to- og trecifrede tal end hos den, der kan regne med negative tal og brøker. Og hvis en person kun kan tegne et søjlediagram, har denne en repræsentationskompetence på et lavere niveau end den, der er i stand til at tegne et cirklediagram.

Imødekommer disse tre dimensioner således det spørgsmålstegn, som Ruthven har sat ved om kompetencer kan evalueres i deres generelle udgave, så indfører de til gengæld en kompleksitet, som er svær at bruge i praksis og ydermere i undersøgelser af undervisning som i det følgende.

Faktisk var der i nærværende del af undersøgelsen af kompetencer ikke mulighed for at gå ind og planlægge undervisningsforløbene, så de blev velegnede til at afklare anvendelsen af de tre dimensioner. Det i det følgende omtalte forløb ‘Matematik Morgener’ havde som pædagogisk

hovedidé, at børnene skulle finde matematik bredt i deres tidlige morgener. Så det ville have været hæmmende for det pædagogiske sigte, hvis læreren fx havde indskrænket deres interessefelt til geometri i deres morgenoplevelser. Forløbet egnede sig således ikke til at afdække deres modellerings- og problemløsningskompetence i forhold til et specielt fagområde.

Derfor er der i det følgende fastholdt et ret generelt matematisk kompetencebegreb, som indeholder de otte matematiske kompetencer, der er beskrevet i KOM-rapporten, men de knyttes ikke til specielle fagområder. Teorien ovenfor viser, at det kunne have været interessant at sammenligne én kompetence, som den udfolder sig inden for forskellige fagområder, men begrænsninger i den foreliggende undersøgelse har ikke muliggjort det.

Det interessante bliver imidlertid, om det bliver muligt at finde frem til en eller flere evalueringsformer, der kan indfange tilegnelsen af modellerings- og problemløsningskompetencen, og som anvendt summativt er reliable. For at nå frem til en afklaring herpå beskrives nu de forskellige forløb i projektet, hvoraf det første foregår på SPF.

## Feltarbejde

### **Første forløb på SPF**

Forløbet i efteråret 2005 lignede meget det forløb, der er omtalt i artiklen ‘Matematik Morgener’ med den tilføjelse, at eleverne foruden en planche skulle føre en mat-log og fremstille matematikbriller. (Se bilag 1)

*Mikael Skånstrøm fortæller:*

“‘Matematik Morgener’ er et undervisningsforløb, der er udviklet på SPF og gennemført en række gange med forskellige perspektiver.

Den første gang var det ‘bare’ et lille udviklingsarbejde med anvendelsesaspektet for matematik i fokus og med henblik på registrering til senere formidling. Næste gang, 3 år senere, var Morten Blomhøj tilknyttet forløbet, og denne gang var det elevernes mulige modelleringskompetencer, vi ønskede at undersøge. I det tredje forløb, efteråret 2005, deltog både Morten Blomhøj og Kristine Jess. Her blev der tilføjet yderlige to elementer til plancheproduktet: hver elev skulle udforme en mat-log, og hver elev skulle fremstille et par matematikbriller af et par (gamle) briller med bogstaver af FIMO-ler.

Introduktionen til forløbet var et brev til eleverne. Her blev forløbet introduceret som det, vi kalder en pædagogisk iscenesættelse, en scenisk beskrivelse suppleret med forventninger og krav til indhold, form og tidsforbrug med en klar deadline. Se bilag 1.



Grundlaget for hele arbejdet er elevernes egne data. Det kræver, at hver eneste af dem foretager en række registreringer, fra de vågner, til de møder i skolen. Og det betyder, at hver besvarelse er unik. I denne allerførste fase får eleverne præsenteret lignende produkter fra de tidligere forløb. Det viser sig at være både motiverende og inspirerende at se noget om, hvilken retning lærerne ønsker denne opgave løst. Størstedelen af eleverne har 'noget' med fra dag et, mens andre griber opgaven lidt mere tøvende an. For dem er enten [www.krak.dk](http://www.krak.dk) og [www.rejseplanen.dk](http://www.rejseplanen.dk) brugbare (nød)løsninger i begyndelsen. Den gensidige inspiration mellem eleverne er stor og væsentlig anderledes end i en traditionel matematikundervisning, hvor alle elever for det meste sidder med de samme opgaver. I løbet af kort tid er alle i gang med at systematisere og formidle deres egne data, designe deres planche, lave bogstaver i FIMO-leret eller søge på nettet efter brugbare informationer. Alle elever er i aktivitet.

Ad mange forskellige veje når eleverne frem mod målet fem moduler og otte skoledage senere. Skemaet er nemlig tilrettelagt, så der i løbet af to uger afvikles seks moduler, 12 lektioner pr elev. Elevernes plancher er ens og forskellige på samme tid. Når opgaven med at samle data er koncentreret omkring en morgen, er antallet af aktiviteter begrænset, men der er dog finurligheder undervejs, og der er mange forskellige måder at præsentere resultaterne på.

Lærernes opgave er voldsomt varieret. Samtale og inspiration står selvsagt højt på aktivitetslisten, men der skal også undervises i delelementer undervejs – for enkelte, i grupper eller for hele holdet. Og så skal ovennævnte med FIMO-bogstaverne jo også passes.

Til sidst skal eleverne laminere deres plancher, som så – for de flestes vedkommende med slet skjult stolthed – overleveres til læreren, der tager en fotokopi i farver til elevens portfoliokasse.”

### **Indtryk fra forløbet**

Jeg deltog så meget, som det var mig praktisk muligt i timerne og gengiver her nogle af mine notater fra forløbet.

Min situation er favorabel, jeg kan deltage, men har ikke ansvar for selve undervisningen eller for det sociale liv i klasserne. Jeg har god tid til at iagttage. Noget af det første jeg bemærker, da jeg kommer ind i bygningen er den rolige atmosfære, hvor lærere og elever bevæger sig rundt i et åbent landskab forsynet med mange faciliteter.

I klasseværelserne er der så meget plads, at eleverne kan sidde i hesteko, og midt i rummet står et bord med masser af papir og karton i forskellige farver samt FIMO-ler. Jeg bliver overrasket over, hvor roligt eleverne kommer ind og sætter sig eller allerede er i klasseværelset. MS (læreren) behøver ikke at gøre en indsats for at skabe ro, så undervisningen kan begynde. Alt i alt meget forskelligt fra, hvad jeg normalt oplever, når jeg er på praktikbesøg på skoler i København og omegn.

MS bidrager med sin levende og humoristiske facon til at skabe en god stemning: Go'morn børn. Og de svarer: Go'morn og nævner navne. Det er en fryd at opleve MS's væremåde over for eleverne, først og fremmest viser han en venlig interesse for eleverne og kan allerede alle navne, og han når at få spurgt dem om både det ene og det andet, der ikke lige har med matematikundervisning at gøre. Hvis en elev har hængt med hovedet eller været på tværs, er MS straks opmærksom og får talt med eleven eller får samlet op på det efter timen.

Eleverne var lidt i gang med forløbet, da jeg kom til. Langt de fleste havde medbragt data fra deres morgener. De kunne selv afgøre, om de ville arbejde med deres matematikbriller eller med planchen. Næsten alle gik i gang af sig selv, og det forekom mig væsentligt, at de selv kunne vælge om de ville 'slappe af' med fremstilling af briller, klippe bogstaver el. lign. ud til deres plancher eller tage det hårde træk med beregninger og fremstilling af grafer. Friheden til at vælge havde formentlig den virkning, at alle var aktive, jeg observerede ikke, at MS behøvede at 'skubbe' til nogen for, at de skulle gå i gang, hvilket jeg har erfaring for ofte er nødvendigt i en 8. klasse. Eleverne var optaget af at få en flot planche, og der skulle mange ting på. De var parate til at tænke med og tænke selv i en dialog med læreren, den ellers ret udbredte holdning, der kommer til udtryk i form af: "Fortæl mig, hvordan jeg skal gøre, så skal jeg nok gøre det", mødte jeg ikke under mine besøg på SPF. Når jeg snakkede med eleverne, var det klart, at dette forløb ville ændre deres opfattelse af, hvordan man arbejder med matematik. Fx: "Jeg har aldrig lavet sådan noget her før", "Nu tror jeg, at jeg vil kunne li' matematik". Det kreative islæt blev omtalt meget positivt.

Umiddelbart efter en dobbeltime noterede jeg efter hukommelsen to små episoder, der giver et indtryk af, hvordan eleverne arbejdede:

### *1. episode*

A (hvis planche og mat-log beskrives senere) havde gangen før fået hjælp til at fremstille et cirkeldiagram over tidsfordelingen om morgenen. Denne gang fandt han ud af, at han skulle gøre rede for sine udregninger, men ak, hans notater var væk. Han var ret opgivende, da jeg kom til. Hvad skulle han nu gøre? Jeg spurgte, om han kunne huske, hvad tid han stod op. Det kunne han. Og han kunne også huske rækkefølgen: gøre sig klar – spise – cykle. Og efter en del besvær fandt han ud af, at han kunne regne baglæns fra cirkeldiagrammet.

Senere så jeg, at han den dag havde skrevet i sin mat-log: Jeg blev nødt til at regne baglæns, det var utrolig svært, men jeg fik klaret det til sidst, og mat-log'en slutter med: Svær, men produktiv dag!

Det skal nævnes, at han gangen før havde skrevet i sin mat-bog, at "jeg har aldrig lavet et cirkeldiagram før, så jeg skulle have meget hjælp til det. Men det lykkedes for mig, og jeg fik lavet cirkeldiagrammet flot, og jeg fik limet det på planchen". Rigtig god dag!

### *2. episode*

C ville gerne have 'noget mere' på sin planche.

Han havde lavet et skema over udgifter til mobiltelefon over tre måneder. Jeg foreslog ham at tegne et søjlediagram, der viste fordelingen af udgifter over de tre måneder, men nej, det ville han ikke, det skulle være et cirkeldiagram.

C: ... hvordan laver man nu det?

Han begyndte at lede efter nogle noter om det.

K: Behøver du dem? Kan du klare det uden? Hvad ved du?

C: De samlede udgifter kan jeg finde, [her kaldt y, jeg kan ikke huske beløbene], han beregnede y på LR og siger, det er 100%, og det svarer til 360°, og så skal jeg jo bare finde ud af, hvor meget hver er [altså hvilken

procentdel udgiften i hver måned udgør], det gør jeg ved at sige  $x$  [ $x = \text{én måned's udgift}$ ] og så gange med 100 og dividere med  $y$ .

C: Derefter skal jeg gange med 3,6 for at finde ud af hvor mange grader, det bliver.

Så gik jeg, og lidt senere havde han tegnet cirkeldiagrammet.

Efter denne positive omtale af forløbet får man alligevel lyst til at stille sig selv spørgsmålet: "Lærte de nu også noget". Det lægger op til at analysere forløbet ud fra kompetencetænkningen og forsøge at evaluere det i forhold til de matematiske kompetencer.

### **Forløbet set med kompetencebriller**

I bilag 2 og 3 er gengivet to plancher for henholdsvis elev A og elev B. I bilag 4 er gengivet en renskrevet oversigt over overskrifter/indhold på plancherne, og under hver overskrift/indholdsangivelse er alle tilhørende beregninger fra mat-log'en tilføjet.

Jeg har valgt at gå tæt på to elever, A og B, de er valgt ud fra en opfattelse af, at de er repræsentative for eleverne i de to 8. klasser, som deltog i undervisningsforløbet.

Jeg vil i det følgende anvende de otte kompetencer deskriptivt for at gøre rede for, hvad der har været på færde i forløbet. Samtidig vil jeg eksemplificere forløbet med A's og B's indsats og dermed opnå at give et tilstandsbillede af deres matematiske kompetencer. Endelig vil jeg redegøre for min opfattelse af produkternes egnethed som evalueringsobjekt.

Beskrivelsen af den enkelte kompetence er fra Niss (2002).

#### **1. Tankegangskompetence – at kunne udøve matematisk tankegang, dvs. at kunne stille spørgsmål, som er karakteristiske for matematik, og have blik for arten af svar som kan opnås**

Hvis man opfatter det, at eleverne har været i stand til at stille spørgsmål til fænomener i deres liv uden for skolen, som kunne besvares ved hjælp af matematik, så har denne kompetence været inddraget i undervisningen. Eleverne demonstrerer, at de er klar over, hvilke spørgsmål der var egnede, og hvilke der ikke var. Måske har ideen med matematikbriller været en støtte hertil.

Men samtidig skal det understreges, at de spørgsmål, de stiller, alle tilhører verdenen uden for matematik, og på den måde er der et overlap til modelleringskompetencen.

Eksempler på spørgsmål fra plancherne: A ville bestemme sin gennemsnitsfart på cykelturen til skole. B ville finde ud af, hvor mange omgange cykelhjulet skulle køre rundt på vej til skole.

#### **2. Problembehandlingskompetence – at kunne formulere og løse matematiske problemer**

Et problem er en situation, hvor en person eller en gruppe søger at udføre en opgave, til hvis løsning der ikke findes nogen umiddelbar tilgængelig algoritme eller metode.<sup>2</sup> Hvis et problem defineres på denne måde som noget relativt, har eleverne ofte inddraget problembehandlingskompetence i dette forløb.

<sup>2</sup>En mere uddybende diskussion af "problem" og "Mathematical Problem Solving" findes i tidsskriftet Nordisk Matematikdidaktik, Volume 4, no. 4, december 1996, s. 7-30.

Fx er det et problem for A at udforme et cirkeldiagram, og det er også et problem for ham, da han som tidligere omtalt har forlagt sine data og må rekonstruere dem ud fra cirkeldiagrammet. Han gennemfører sine beregninger med nogen hjælp. B demonstrerer problembehandlingskompetence ved at tegne en grundplan af sit værelse i målestoksforhold 1:25, selv om der er en regnefejl, ser man, at hun magter beregningsmetoden.

Problembehandlingen må her ses som en delmængde af modelleringskompetencen.

### **3. Modelleringskompetence – at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter**

Forløbet lagde op til, at denne kompetence skulle være i centrum, hvilket den også var. A viser sin modelleringskompetence i "Gåtur/bus/cykel", her er han i stand til at finde oplysninger (bl.a. Krak.dk), som sætter ham i stand til at matematisere sin problemstilling og beregne gennemsnitshastighed. Imidlertid havde det været interessant, hvis han havde fortolket sit resultat og fx sammenlignet de forskellige 'transportmidler' med hensyn til tidsforbrug, udgifter m.m. Han tilføjer, at et koordinatsystem giver ham et godt overblik over turens forløb, men han skriver ikke noget, som viser, at han reflekterer over det, han ser.

A's oversigt over næringsindhold i sin morgenmad kan knapt nok kaldes modellering, der er et tilløb, og hvis han havde beregnet det samlede indhold af de forskellige energigivende stoffer og vurderet og fortolket sit resultat fx i forhold til, hvad han skulle være opmærksom på ved de øvrige måltider, havde det været gennemført.

B viser nogen modelleringskompetence ved beregning af sit vandforbrug om morgenen, beregning af gennemsnitshastighed på cykelturen til skole, plantegning af sit værelse og beregning af, hvor stor en procentdel af sit liv, hun vil komme til at sove. B har meget klare beskrivelser af sine udregninger og viser opfindsomhed med de spørgsmål, hun stiller, men som A gennemfører hun ikke modelleringsprocessen og viser, at hun vurderer og reflekterer over sine matematiske beregninger i forhold til virkeligheden. Det ville have været oplagt at undre sig over 3 liters vandforbrug til at vaske sig i og næsten en hel liter til tandbørstning.

### **4. Ræsonnementskompetence – at kunne ræsonnere matematisk, navnlig i forbindelse med retfærdiggørelsen af matematiske påstande**

Denne kompetence ses faktisk ikke i forløbet. Der er ingen elever, der viser, at de ræsonnerer over matematiske påstande. Det nærmeste, man kommer ræsonnementskompetencen, findes hos B, når hun skriver: "Hvis jeg sover ... [så] vil jeg komme til at sove 34,5% af mit liv!" Og det må siges, at være sparsomt.

### **5. Repræsentationskompetence – at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold (såsom symbolske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige, verbale eller materielle repræsentationer)**

Idet et af produkterne skulle være en planche, et det nærliggende, at denne kompetence kommer til udfoldelse. Først og fremmest havde næsten alle eleverne valgt at sætte et cirkeldiagram på deres planche, måske fordi MS ved forløbets start som noget af det eneste gennemgik, hvordan man fremstiller et sådant, fordi han havde erfaring for, at det skulle forklares mange gange. B udgør dog

en undtagelse ved ikke at have et sådant på sin planche, men A var meget insisterende på, at han ville have et på sin, selv om det medførte noget besvær for ham.

### **6. Symbol- og formalismekompetence – at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme**

Det er uundgåeligt, at symbol- og formalismekompetencen kommer til udfoldelse, da eleverne skulle redegøre for deres beregninger i mat-log'en. Som det fremgår af mat-log'en har både A og B demonstreret et pænt niveau i symbolbehandling, men ingen af dem anvender formler. Andre elever anvendte dog simple formler.

### **7. Kommunikationskompetence – at kunne kommunikere i, med og om matematik**

Både planche og mat-log er en tydelig demonstration af, at kommunikationskompetencen har været i spil. A kommunikerer især godt via sin mat-log, og B beskriver omhyggeligt sine resultater på planchen og har en meget klar fremstilling i sin mat-log.

### **8. Hjælpemiddelkompetence – at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed (inkl. IT).**

Mange elever hentede oplysninger på computer, og i øvrigt anvendte de lommeregner, passer, vinkelmåler m.m. Eleverne viste hermed, at de kunne betjene sig af disse hjælpemidler, men en egentlig forholden sig til hjælpemidlerne blev ikke synlig. Det gjorde sig også gældende for A og B.

#### *Mange kompetencer i spil*

Efter at have set på forløbet med kompetencebriller forekommer det mig at være et meget flot forløb, fordi eleverne har haft mulighed for at udvikle alle de otte matematiske kompetencer på nær ræsonnementskompetencen. Det er helt urealistisk at forvente, at ethvert undervisningsforløb skal indeholde alle otte kompetencer, så at møde et, der tilgodeser så mange, er imponerende.

#### *Produkterne giver indsigt*

Som det fremgår af gennemgangen af hver enkelt kompetence i forhold til A's og B's plancher og mat-log'er, så får man via disse produkter en ganske god indsigt i A's og B's matematiske kompetencer. Derfor finder jeg kombinationen af planche og mat-log velegnede som evalueringsobjekter. I den proces, jeg var igennem med renskrivning og analyse, blev jeg overrasket over, hvor klart et indtryk, jeg fik dannet mig af de to elever – og især af, hvor jeg skulle sætte ind i den fremtidige undervisning, hvis jeg var deres lærer.

#### *'Lærte de noget'*

Spørgsmålet 'om de nu også lærte noget' må besvares med, at undervisningens indhold og tilrettelæggelse gav endog meget gode muligheder for at tilegne sig de matematiske kompetencer – især modelleringskompetencen på det niveau, som 8. klasses elever er på. Ikke mindst fordi eleverne som nævnt var optaget af at få nogle flotte plancher med meget på, og fordi de ikke følte sig kostet rundt med af læreren, men havde en følelse af, at de selv kunne bestemme. Senere vender jeg tilbage til elevernes egne opfattelser af dette.

Forløbet, jeg havde lejlighed til at følge, var ikke tilrettelagt med henblik på at belyse mulighederne for evaluering. Formålet med forløbet var at give eleverne mulighed for at arbejde med modelleringsprocesser og dermed udvikle deres problemløsnings- og modelleringskompetence, samtidig var der en hensigt om at rokke ved de elevers syn på matematik, der indtil 8. klasse var blevet undervist på mere traditionelle måder og give dem en oplevelse af, at matematik er et



spændende og kreativt fag, der kan bruges til noget. I hvilken udstrækning det lykkedes, vender jeg tilbage til under afsnittet: Analyse af interview s. 20.

### ***Andet forløb på SPF***

Her blev tilrettelagt et ganske kort forløb med den hensigt at opnå indsigt i elevernes kompetence til at analysere en modelleringsproces og forholde sig kritisk til resultater af en sådan. Vi udformede nogle modelleringsforløb, som eleverne skulle vurdere. I håb om at eleverne kunne opnå ejerskab til forløbene, byggede vi på nogle af de problemstillinger, de selv havde inddraget i 'Matematik Morgener'. Se bilag 5, 6 og 7. Som det fremgår, er der fejl i modelleringsprocesserne, ville eleverne opdage disse?

Jeg har valgt tre besvarelser, som kan ses i kopi efter hver opgave i bilagene 5, 6 og 7. Her gengiver jeg kort de tre besvarelser:

“Pernille i bad” (rød). Først svarer de på spørgsmål 1), at beregningerne er korrekte, derefter ser det ud som de senere har tilføjet, at ugen efter vil hun kun vaske hår to gange, hvilket er rigtigt. Spørgsmål 2) besvares lakonisk: “Det er vel i orden”. Dette kunne de godt have uddybet efter opdagelsen af forskelligt antal hårvask. Til spørgsmål 3) påpeger de, at hun også kunne måle det varme vand.

“Tour de skole” (grøn). De finder fejlen i Mads’ beregning og beregner derefter hans gennemsnitshastighed. Herefter finder de Steens gennemsnitshastighed, de kunne let gøre det på én dag, men regner først tid og km ud for en uge, sikkert fordi ‘læreren’ har gjort det i Mads’ tilfælde. Som svar på spørgsmål 2) svarer de, at når Mads har kortere vej til skole, så er det næsten naturligt, at han er hurtigere. Men tilføjer så, at Mads snød, og Steen var hurtigst.

“Aktiv ottende” (gul). Til spørgsmål 1) har eleverne ganske rigtigt påpeget, at B-klassemens cirkeldiagram er forkert, og på selve opgaven har de skrevet fejl ud for svømning. I 2) har de givet forklaring på, at B-klassen er mest aktiv, da 24 mod 22 i A-klassen går til noget. Til spørgsmål 3) har de opstillet et søjlediagram til sammenligning af aktivitetsniveauet. Det er ok, men giver ikke et godt overblik.

#### *Vurdering af elevernes besvarelse*

De besvarelser, jeg har redegjort for her, vurderer jeg som gode og egnede som evalueringsobjekter. Det fremgår af disse, at nogle elever kan forholde sig kritisk til modelleringsprocesser. Kvaliteten af elevernes besvarelser i de to klasser var dog meget svingende, nogle af dem var nærmest ulæselige. Og en del elever fandt opgaverne vanskelige, og få gav udtryk for, at de syntes, det var noget underligt noget. Måske sidder de fast i et opgaveparadigme, hvor det er uvant at få opgaver fra læreren med fejl i. I øvrigt gjorde eleverne ikke meget ud af at vælge efter indhold, hvilket vi havde troet. De valgte snarere efter farve (opgaverne var trykt på tre forskellige farver papir). Så meget for ejerskab!

#### *Elevernes reaktion på opgaverne*

Efterfølgende bad vi eleverne om at give deres vurdering af forløbet:

S: Sjovt og let, men tre opgaver var for mange, én havde været bedre, så man kunne fordybe sig.

J: Den gule var sjov, det var godt med farvet papir, L. er enig.

M: Interessant, fedt og spændende.

P: Den røde var svær. Til den grønne skulle man ledes ind på sporet.

T: Meget sjovt – bedre end færdighedsregning.

S: Den røde var for svær i starten.

E: Det er nødvendigt med tre hårvaske på en uge, for ellers vil ens mor synes, man er en gris.

Som udtalelserne viser, var eleverne efterfølgende ret positive over for forløbet. Vi forlader nu eleverne på SPF, men vender tilbage til dem i afsnittet, Analyse af interview, for at få et samlet indtryk af forløbet.

### ***Første forløb med lærerstuderende***

På KDAS blev gennemført et lignende forløb på et daghold med linjefagsstuderende i matematik, hvor de studerende også skulle modellere på egne 'Matematik Morgener'. Hensigten hermed var dels, at de skulle udvikle deres modelleringskompetence, og dels at de skulle involveres i problematikken med at evaluere matematiske kompetencer. Til sidst skulle de studerende gennemføre et kvalitativt interview med eleverne på SPF. Se evt. bilag 8, hvor der er en plan over forløbet.

### **Begrundelse for at inddrage de lærerstuderende**

Der var flere begrundelser for at inddrage de lærerstuderende i projektet:

- Det kunne let forenes med, at de alligevel skulle opnå indsigt i: evalueringsformer og konsekvenser af evaluering, kompetencetænkningen og modelleringsprocesser. Dvs. den undervisningstid, der blev brugt var vel anvendt.
- De studerende skulle prøve at arbejde med i et projekt, der søgte svar på en problemstilling.
- De skulle få indsigt i forløbet 'Matematik Morgener' som en måde at arbejde på i grundskolen.
- De skulle selv arbejde med modelleringsprocesser over egne 'Matematik Morgener' dels for at få indsigt i modellering og dels for at opnå ejerskab til projektet.
- De skulle have en første introduktion til den kvalitative interviewform og afprøve den i praksis.

Dertil kommer, at holdets lærer, SG, og jeg havde en forhåbning om, at de ville få en oplevelse af, at de via deres ungdom, entusiasme og kreativitet kunne bidrage med nytænkning i forhold til evalueringsformer.

## **Bemærkninger til forløbet**

SG og jeg opnåede ikke, at de studerende kom til at føle ejerskab til projektet, før vi nåede frem til arbejdet med deres egne matematikmorgner og interviewet til sidst i forløbet. Vi havde praktiske forhold imod os, idet timerne lå om eftermiddagen, og de studerende kom temmelig udmattede fra en anden undervisning, hvor de ikke havde haft pauser eller tid til at spise. Ofte var der kun to-tre studerende ved undervisningens start, og de øvrige kom dumpende i løbet af den næste halve time, fordi de lige skulle have lidt mad m.m.

Det bevirkede, at den indledende introduktion blev meget fragmentarisk for de fleste studerende, hvilket i lang tid prægede projektet. Noget inde i forløbet, hvor vi beskæftigede os med evaluering og kompetencer blev det klart, at for nogle studerende tog det hele sig ud som spredt fægtning, der ikke var hoved og hale i.

Vi fik diskuteret, hvad der var galt, og det kom det frem, at det ikke rigtigt var gået op for dem, hvad det hele gik ud på. Introduktionen fra første dag blev gentaget, hvilket havde en positiv virkning. I den sidste del af forløbet, hvor timerne lå mere gunstigt, indførte vi efter aftale med de studerende deltagelsespligt (de studerende skal deltage i undervisningen og manglende fremmøde får konsekvenser). Det gav en helt anden samling og entusiasme, som dog også kan skyldes, at de studerende syntes, det var spændende at arbejde med deres egne matematikmorgner. De var nu klar til at forberede sig på at interviewe eleverne på SPF.

## **Lærerstuderende på SPF**

### **Introduktion, forberedelse**

De studerende fik en introduktion til det kvalitative interview, hvor det væsentlige af indholdet fremgår af bilag 9.

Derefter skulle de blive enige om nogle spørgsmål, de kunne stille til eleverne, dels for at de ikke skulle komme i den situation, at de ikke anede, hvad de skulle spørge eleverne om, og dels fordi det måske ville blive lettere at sammenligne passager i interviewene.

Fælles brainstorming på holdet førte frem til følgende interviewspørgsmål:

- Hvilke situationer blev modelleret?
- Hvad var svært/let?
- Hvordan klarede du det, der var svært? (kammerater, bøger, internet, lærer)
- Kan du bruge noget af det, du har lært, igen? (i hvilke situationer? Intervieweren nævner fx en situation)
- Fik du vist det, du havde lært via planchen og Matlog'en?
- Hvordan var det at fremstille planchen? (svært/let/besværligt/sjovt/tidsspilde)
- Hvordan var det at skrive Matlog? (svært/let/besværligt/sjovt/tidsspilde)
- Hvordan var det at fremstille matematikbriller? (svært/let/besværligt/sjovt/tidsspilde)
- Ville du have gjort det anderledes i dag?
- Har du lært noget andet/nyt end du gjorde på din gamle skole?)

Herefter afprøvede de teknik, interviewform og spørgsmål på hinanden.

## Analyse af interviews

Besøget på SPF indeholdt overraskelser. Både elever og studerende var seriøse og interviewene forløb meget positivt. Flere af de studerende var efterfølgende optaget af, at eleverne havde været så åbne og ærlige, og de mente, at det var fordi, de selv var unge og ikke blev betragtet som 'rigtige' lærere.

Indholdet i interviewene er meget rigt på fænomener, som det ville være spændende at analysere nærmere, jeg har derfor valgt at medtage to punkter foruden punkt 1, som er relevant i denne sammenhæng.

### 1. Er det elevernes opfattelse, at de via planche og mat-log har fået vist, hvad de kunne?

Interviewer: Men var det så en god idé at føre den mat-log?

Elev 1: Ja, det synes jeg.

Interviewer: Men hvad synes du?

Elev 2: Om mat-log'en, det var en fin idé, jeg skrev ned, hvordan jeg havde lavet tingene, og hvor jeg havde fået det fra for hvert diagram og sådan noget, og så havde jeg så skrevet lidt om, hvordan jeg regnede det ud, og hvad jeg havde gjort.

og

Interviewer: Førte du så en Mat-log?

Elev: Ja, det gjorde jeg.

Interviewer: Var det en god måde at arbejde på?

Elev: Ja, fordi der var mange af de der mellemregninger, som jeg ikke satte på min planche, [dem] satte jeg så ind i mat-log'en, og så havde man også styr på, hvad man havde lavet, ik. ...

og

Interviewer: Forhåbentlig har I lært nogle ting, mens I har lavet de 'Matematik Morgener', har I fået det ned på planchen, Føler I, at det I har lært, det har I også fået ned på jeres planche, så folk kan se, hvad jeg har lært?

eleverne snakker i kor: de virker tilfredse

På spørgsmålet: Fik de vist det, de kunne på planchen og i mat-log'en? Svarede de adspurgte ja, og de syntes, det var en god måde at vise det på. Nogle elever ville gerne have fremlagt for klassen, andre ville bestemt ikke.

Mat-log'en var der delte meninger om. Nogle fandt den irriterende, at skulle skrive. Andre fandt det ok, så MS kunne følge med i, hvad de foretog sig (de tænkte ikke på, at MS ikke kunne læse dem dagligt!). Men det dagbogslignende var der ikke stor begejstring for, nogle elever mente, at det

kunne man ikke bruge til noget, når man så på planchen, det kunne da være ligegyldigt, om den graf eller noget andet var lavet lige den dag. Men der ret stor tilfredshed med, at man lige kunne checke sine egen beregninger og se, hvordan man havde gjort, hvis man nu havde glemt det, så det var noget, man kunne få glæde af senere.

Efter elevernes opfattelse var plancher og mat-log tilsammen et udmærket grundlag for evaluering af deres kunnen på området. De nævnede ikke direkte modellerings- og problemløsningskompetence, hvilket de heller ikke havde noget grundlag for.

## *2. Elevernes sammenligning af nuværende og tidligere matematikundervisning*

Noget af det mest iøjnefaldende var elevernes sammenligninger med deres hidtidige matematikundervisning. Eleverne udtaler sig meget kritisk om matematikundervisningen på deres 'gamle' skoler. Klip fra interview:

Elev: Der er mange ting, som jeg ikke rigtig har kunnet lave på min gamle skole, det var meget sådan noget, så slår vi bare op i grundbogen, og så var der nogle sider, hvor vi sprang over, og måske var det så de sider, vi sprang over, som så kunne bruges til et eller andet.

og

Interviewer: Hvad var det gode ved at arbejde på denne måde i forhold til din gamle skole?

Elev: Jeg fik lov til at lave noget kreativt i stedet for bare at sidde og lave sådan noget på papir, hvor man bare sidder og skriver regnestykker...

og

Interviewer: I forhold til den gamle skole er det her så en bedre måde at arbejde med matematik?

Elev 1: Meget, især æhh, jeg kunne godt li' matematik for år tilbage, det kan jeg også godt nu, men så fik vi en lærer, som var ... meget dominerende, det var altid ham, der skulle være i centrum.

Interviewer: Så det var ikke så meget matematik, I lærte?

Elev 1: Nej, men så kørte vi sådan en grundbog, men det her, synes jeg, er sjovere.

Interviewer: Ja, får I mere udfordring, er det det, du mener?

Elev 1: Ja, og du kan samtidig være kreativ og samtidig lave noget matematik.

Elev 2: Det synes jeg er godt, at der ikke er sådan noget bog.

Elev 1: Ikke sådan en grundbog?

Elev 2: Ja, det synes jeg er rigtig godt.

Gennem interviewene får man det indtryk, at de fleste elever har haft en meget ensformig matematikundervisning baseret på en grundbog og på uvedkommende opgaver. Eleverne fremhæver med forskellige udtalelser, at den måde at arbejde med matematik på, som de gør i 'Matematik Morgener' er meget bedre. Klip fra interview:

Interviewer: Hvordan var det anderledes end det, I havde været vant til?

Elev: I min gamle klasse der lavede vi ikke sådan noget kreativt, da lavede vi kun blækregning og sådan noget.

Interviewer: Har I fået mere ud af at arbejde på denne her måde?

Elev: Det er sjovere, end der bare er én måde, det skal se ud på, i stedet for man bare kan få lov til selv at bestemme (U)<sup>3</sup>.

Interviewer: Har I så haft lyst til at regne noget mere, fordi det skal være mere kreativt bagefter, eller havde jeres lyst til at regne været den samme, selv om det ikke var gjort på den her måde, at det bare var om at komme med en udregning.

Eleverne (i kor): mere lyst til det her

Elev: Man bestemmer det jo selv, ik. Man bliver jo ikke kun bedømt på, om det er rigtig eller forkert, det er jo ikke rigtig eller forkert, men altså det ... jo jeg vil meget hellere (U) matematik i hvert fald, end bare sidde og lave færdighedsregning hele tiden, ik'?

og

Interviewer: Er I blevet gladere for at have matematik, efter at I har haft det her?

Elev: Det tror jeg.

Elev: Ja, for jeg har slet ikke været vant til sådan noget, hvor man selv kunne bestemme, hvad det var, man ville lave (U) og lave sådan en planche, det er sådan noget jeg godt kan li', jeg kan ikke li' bare at sidde og regne (U) og så ikke bare tørre tal, det er jeg rigtig rigtig glad for, jeg har fået meget mere mod på matematiktimerne.

Der var en udbredt tilfredshed med at arbejde med matematik på den måde, som det var foregået i 'Matematik Morgener', og når jeg inddrager dette, er det fordi jeg er overrasket over, dels hvor kedeligt eleverne opfatter deres tidligere matematikundervisning, og hvor stor pris, de sætter på at få mulighed for at udfolde sig og inddrage et kreativt element, som det er sket i 'Matematik Morgener'. Jeg var fra starten lidt skeptisk ved, om eleverne ville få tilstrækkeligt fagligt udbytte af

---

<sup>3</sup> (U) står for noget uforståeligt.

forløbet, og det er måske også begrænset, hvor meget nyt de har lært, selv om der har været mange matematiske kompetencer i spil. Men den glæde og entusiasme eleverne udviste under arbejdet sammen med oplevelsen af, at matematik kan være noget andet end opgaver i en bog eller på papir er meget værdifuld.

Eleverne har oplevet, at matematik kan være noget helt anderledes end det næsten alle har været vant til i den tidligere skole, min opfattelse er: *De har fået ændret syn på matematik.*

### 3. Ejerskab og ansvarlighed

Elev: Man fik mere lyst til at lave det, når det var om sig selv

og

Interviewer: Var der noget nyt i den måde at arbejde på?

Elev: I min gamle klasse var der ikke noget med at stille det op på en planche, der fik man bare noget papir og sådan. ... Man får sådan et papir her, der skal ikke være det og det på den, man får selv lov til at bestemme, hvad der er på den, det synes jeg er godt.

Interviewer: Det var det gode ved dette her arbejde?

Elev: Ja

Interviewer: Hvad var så dårligt?

Elev: Jeg synes ikke rigtig, der var noget dårligt i det.

Interviewer: Så er du virkelig tilfreds med det?

Elev: Ja.

og

Interviewer: Hvad har I lært?

Elev: Jeg kan i hvert fald ikke lige komme på, hvad jeg har lært, men det der med at tænke lidt mere kreative nogen gange ... fik opfrisket tingene og ...

Elev: Jeg tror faktisk, at efter jeg har lavet det der projekt, så tror jeg, at jeg har lært lidt mere, jamen det er op til en selv og lære tingene, altså det er ikke læreren, der skal gøre det, fordi hvis man ikke selv gør det, så lærer man ikke så meget, og det så jeg så bagefter, ja, man skal selv styre det, og det synes jeg også er sjovere og styre det selv.

Interviewer: Og bestemme selv og tage initiativet selv ik?

Elev: Så lærer man også mere, når man tager initiativet selv.

Interviewer: Der er rigtigt nok.

og

Interviewer: Hvad var det ikke gode så?

Elev: Det var meget selvstændigt, og jeg tog det ikke så seriøst, som jeg måske skulle ha' gjort, det, synes jeg, er blevet bedre nu. Jeg skulle måske ha' taget det noget mere seriøst og lavet nogle sværere stykker, for det var lidt for nemt, synes jeg.

Eleverne var optaget af at finde på ting til planchen, som var forskellige fra det, de andre havde, men fandt det også svært, "for morgener ligner jo hinanden". Alle gik op i, at planchen skulle blive flot, de koncentrerede sig meget om layout i begyndelsen, og nogle var lidt sene til at rette opmærksomheden på det matematiske indhold.

Det var tydeligt, når man var til stede i klassen, og det fremgår også af interviewene, at eleverne var meget tilfredse med muligheden for selv at bestemme – både indhold, og hvornår man arbejdede med det ene og det andet. Det gav en positiv følelse af frihed, der virkede befordrende på arbejdsindsatsen. Og det, at det var noget fra deres eget liv, de skulle arbejde med, bevirkede, at de udviklede ejerskab til projektet.

Friheden til selv at bestemme var meget væsentligt. Samtidig blev de faktisk nødt til selv at bestemme/tage initiativ, der var ingen lærer, der kom og sagde, at nu skulle de det eller det. Måske er det årsagen til, at en elev meget tydeligt siger, at efter han har arbejdet med 'Matematik Morgener', så har han fundet ud af, at det er op til en selv at lære tingene, det er ikke læreren, der skal gøre det, fordi hvis man ikke selv gør det, så lærer man ikke så meget. Igen vil jeg vove en påstand om forløbets betydning: *Man skal som elev selv påtage sig et ansvar.*

Det er mit indtryk, at de studerende har fået meget stof til eftertanke af at have gennemført interviewene med eleverne, det fremgår et enkelt sted, at en studerende siger til eleverne, at det her vil jeg huske på, når jeg kommer ud som lærer.

Desværre gjorde praktiske årsager, at jeg ikke havde lejlighed til at deltage i en diskussion af indholdet i interviewene med de studerende, ligesom det ærgerligt nok heller ikke lykkedes at få tid til en diskussion af evalueringsformer.

### **Dagholdets forslag til evalueringsformer**

Imidlertid afleverede de studerende skriftlige forslag til, hvordan modellerings- og problemløsningskompetencen kunne evalueres. Her var der to dominerende forslag: 1) Der skal afleveres noget skriftligt om ideer, overvejelser og resultater undervejs i modelleringsprocessen, evt. skal læreren udforme et spørgeskema, som skal udfyldes efterhånden forløbet skrider frem. 2) Der skal tilrettelægges et forløb i lighed med den mundtlige afgangsprøve i grundskolen, hvor eleverne som oftest arbejder parvis, fx tre par i ca. 1½ time, og hvor lærer og censor går rundt til parrene og gennem samtaler med eleverne opnår indsigt i deres kompetencer. De studerende forestiller sig, at et sådant forløb uden den samme tidsbegrænsning og med større individuel opmærksomhed vil være ideelt – selv om, som de skriver, det nok er urealistisk. Underligt nok nævner de ikke planche og mat-log.



Jeg vender tilbage med en vurdering af disse forslag efter at have redegjort for endnu et forløb på KDAS.

### ***Andet forløb med lærerstuderende***

Efter det første forløb med lærerstuderende inddrog jeg et af mine egne hold på KDAS. Denne gang var det et aften-merithold, hvor de fleste studerende har en akademisk uddannelse bag sig, og hvor mange har job i skolen om dagen. De studerende er meget seriøse og engagerede, og det er et usædvanligt godt hold.

Som oplæg til at gå ind i en diskussion af, hvordan man kunne evaluere tilegnelsen af modelleringskompetence, læste de studerende artiklen: 'Matematik Morgener', fik en orientering om det hidtidige forløb, så plancher, mat-log'er og 'farvede opgaver'. Desuden gennemførte de selv et kort forløb med modelleringsprocesser.

## **Evaluering af kompetencer – hvordan?**

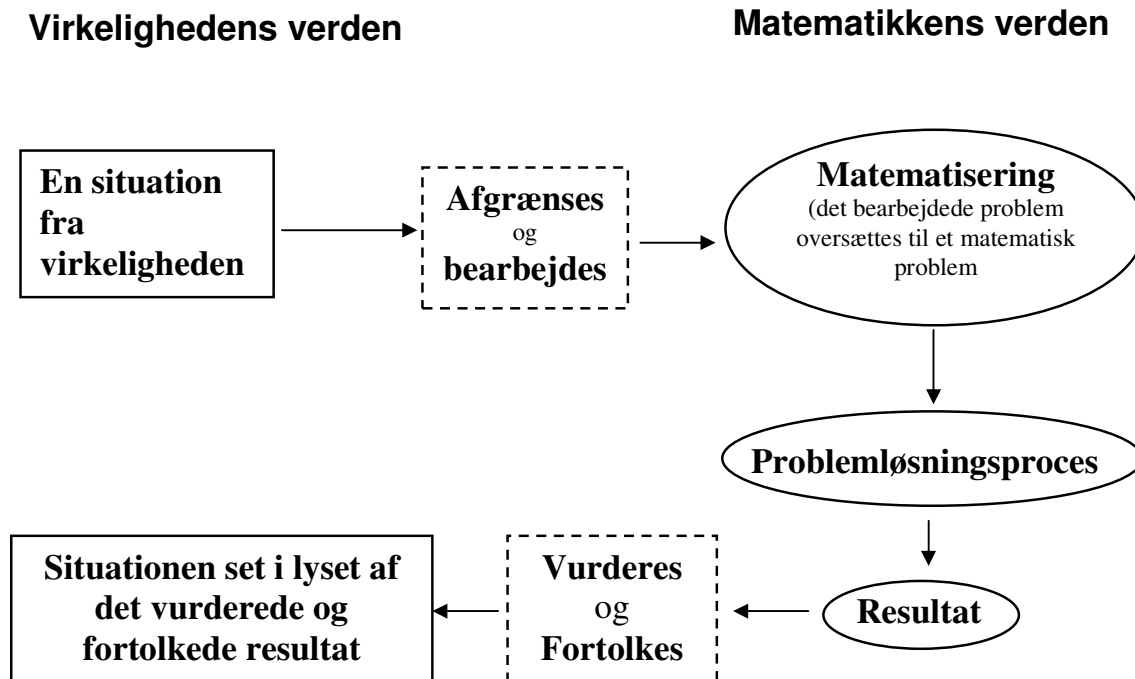
Først gengiver jeg konklusionen på den efterfølgende diskussion på meritholdet, hvor såvel de studerendes bidrag som mine overvejelser og erfaringer fra det hidtidige forløb blev diskuteret. Derefter sammenholder jeg det med dagholdets bidrag.

Det blev hurtigt klart, at evaluering af især modelleringskompetencen ikke var nogen enkelt sag. De produkter, der forelå i form af plancher og mat-log blev vurderet til at give et ganske godt indblik i elevens kompetencer, men blev ikke vurderet som tilstrækkelig struktureret til at give et præcist billede af modelleringskompetencen og var naturligvis ikke egnet på et højere uddannelsesniveau. De 'farvede opgaver' kunne være en idé, men gav kun mulighed for at evaluere den del af modelleringskompetencen, der bestod af kritik af modelleringsprocessen.

Vi nåede frem til, at den bedste måde at evaluere modelleringskompetencen på ville være at bygge på en oversigt over en modelleringsproces (figur 1) og bede eleven/den studerende beskrive de overvejelser, der var knyttet til de enkelte trin i modelleringsprocessen. Naturligvis på et passende niveau i forhold til om det var i grundskolen eller senere i et uddannelsesforløb.

Fig. 1

## Modelleringsproces



Der var flere begrundelser for denne måde at evaluere på: For det første ville det tvinge eleven/den studerende til at reflektere over hvert trin, inden han eller hun gik videre til næste trin, dermed ville evalueringsformen løbende have en gunstig indflydelse på processen og formodentlig kvalificere denne. For det andet ville man få et godt indblik i elevens/den studerendes problemløsningskompetence, idet den matematiske behandling af problemet ville blive beskrevet mere fyldestgørende, end det ville være tilfældet med blot nogle udregninger. For det tredje ville denne evalueringsform, såfremt den ikke fandt sted som afslutning på et uddannelsesforløb, informere læreren om, hvilke delelementer i modelleringsprocessen der skulle lægges vægt på i den fremtidige undervisning.

Denne måde at evaluere modellerings- og problemløsningskompetence er efter min opfattelse en – indtil videre – god og brugbar metode. Den er delvis i overensstemmelse med et af forslagene fra de studerende på dagholdet, selv om disse ikke var så fyldestgørende og præcise. Imidlertid mener jeg, at dagholdets forslag om et af læreren udformet spørgeskema, der skal udfyldes undervejs i processen, vil være en god idé især i tidlige faser af arbejdet med modellering. Forslaget fra dagholdet om en evalueringsform a la den mundtlige afgangsprøve i grundskolen er efter min vurdering ideel, da der kan opnås meget i nær og langvarig kontakt mellem fx to elever/studerende og læreren. Eleverne/de studerende vil kunne få megen nyttig feedback, og læreren vil opnå en virkelig god indsigt i deres kompetencer, men, som de studerende også selv er inde på, er det næppe realistisk inden for de gængse økonomiske rammer for undervisning.

Alt i alt mener jeg, at en evaluering af modellerings- og problemløsningskompetencerne kan bygges på modellen fig. 1, som kan forenkles/udbygges i forhold til det uddannelsesniveau, man befinder sig på. Hvert enkelt led i modelleringsprocessen beskrives, evt. ud fra et spørgeskema, der indeholder en oversigt over de elementer, der skal indgå i processen på det givne niveau. Når jeg går ind for denne evalueringsform er det på grund af, at den først og fremmest ikke kan betragtes som tidsspilde for de involverede elever/studerende, men tværtimod må anses for at gavne disse i deres læreproces. Tillige giver den læreren mulighed for at få god indsigt i den enkeltes kompetencer, og dermed udgør den en formativ evaluering, der giver et godt udgangspunkt for den videre undervisning. Hvis denne form anvendes som summativ evaluering er det min opfattelse, at den er valid, forstået på den måde, at med så fyldestgørende en beskrivelse af modelleringsprocessen kan man sikre sig, at det, der skal evalueres, bliver evalueret. Samtidig vil den formodentlig være pålidelig (reliable), hvilket igen begrundes med den grundige beskrivelse af forløbet, som giver et grundlag for en ensartet bedømmelse.

### ***Afsluttende bemærkninger***

Efter at være kommet med et bud på, hvordan evaluering af henholdsvis modellerings- og problemløsningskompetence kan finde sted, vil jeg kommentere på forløbet i øvrigt.

Det var overordentligt spændende og lærerigt for mig som seminarlærer at deltage i undervisningen på SPF. Det gav mig et indtryk af, hvad elever får ud af matematikundervisningen i de første syv skoleår og hvilken opfattelse, eleverne får af, hvad matematik er. Det forekom mig foruroligende, hvor snæver færdighedsdomineret matematikundervisning mange elever stadig får i den danske grundskole, og samtidig var det positivt at opleve, hvordan et projekt som 'Matematik Morgener' kan bidrage til at røkke ved elevernes opfattelse: "Nu tror jeg, at jeg vil kunne lide matematik".

Efter en noget problematisk start med dagholdet på KDAS var det positivt at se, hvor seriøse de studerende var, da de interviewede eleverne på SPF. Deres bidrag til, hvordan evaluering af modellerings- og problemløsningskompetencer må vurderes som konstruktive, men bar også præg af, at det er en yderst vanskelig problemstilling. Det skal tilføjes, at de studerende i en senere evaluering af semestret gav udtryk for, at de havde fundet det spændende og givende at være inddraget i forløbet.

Meritholdet var i første omgang interesseret i mulighederne i undervisningsforløbet 'Matematik Morgener'. Derefter var de optaget af problemet med at evaluere tilegnelsen af kompetencer, og endelig var de meget engagerede i at bidrage til besvarelse af spørgsmålet: Hvordan evaluere tilegnelsen af modellerings- og problemløsningskompetencen?

Med de studerendes bidrag er jeg nået frem til at komme med et bud på, hvordan modellerings- og problemløsningskompetence kan evalueres. Forslaget er imidlertid ret enkelt og begrænset til kun to af de otte matematiske kompetencer, der er indgår i KOM-rapporten, og de væsentlige nuancer, som inddragelse af de tre dimensioner: 'dækningsgrad', 'aktionsradius' og 'teknisk niveau' kunne give, er udeladt. Derfor må det opnåede resultat ses som et skridt på vejen til at udvikle evalueringsmetoder, der kan indfange tilegnelsen af matematiske kompetencer generelt, nuanceret og med høj grad af reliabilitet.

## Litteraturliste

- Barnes, M., Clarke, D.J. & Stephens, M. (2000). Assessment: The engine of systematic curricular reform? *Journal of Curriculum Studies* 32(5), 623-650.
- Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (2003): 'Matematik Morgener'. I: *Konferanserapport: Udvikling av matematikundervisning i samspill mellom praksis og forskning, No 1*, 61-72.
- Clarke, D. (1996). Assessment. I: A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (327-370). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cooney, T., Badger, E. & Wilson, M. (1993). Assessment, understanding mathematics, and distinguishing visions from mirages. I: *Assessment in the mathematics classroom. Yearbook* (239-247). National Council of Teachers of Mathematics.
- Fælles Mål, Faghæfte 12, Matematik* (2003). Undervisningsministeriet, Uddannelsesstyrelsens håndbogsserie nr. 10 – 2003. Grundskolen.
- Jess, K. (2005): Konsekvenser af evaluering i matematikundervisning. I *MONA (Matematik- og naturfagsdidaktik – tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere) Danmarks Pædagogiske Universitet*, nr. 2, s. 22-39.
- Jess, K. (2004). Formativ Evaluering i Matematikundervisningen – Ændringer i praksis. *Nordisk Matematikdidaktik (NOMAD)*, 9(4), 15-47.
- Keitel, C. (under udgivelse). The shaping of mathematics education through testing. In: M. Niss (red.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education*.
- Kilpatrick, J. (1993). The chain and the arrow: From the history of mathematics assessment. I: *Investigations into assessment in mathematics education* (31-46). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Nichols, S. L., Glass, G.V. & Berliner, D.C. (2005). High-stakes testing and student achievement: Problems for the No Child Left Behind Act. *Education Policy Research Unit (EPRU)*, September. Lokaliseret 16/11 2006 på <http://www.asu.edu/educ/eps/EPRU/documents/EPSL-0509-105-EPRU.pdf>
- Niss, M. & Jensen, T.H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark, "KOM-projektet". Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Undervisningsministeriet.
- Niss, M. (2002). Faglighed i, med og om matematik. I: *Uddannelse 3* Lokaliseret 16/11 2006 på <http://udd.uvm.dk/200203/udd200203-08.htm?menuid=4515>
- Niss, M. (1993). Assessment in mathematics education and its effects: An introduction to investigations into assessment in mathematics education. I: M. Niss (ed.), *Investigations into assessment in mathematics education* (1-30). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Niss, M. (1994). Behov for nye metoder i bedømmelse og vurdering i matematik. I *MATEMATIK*, nr. 1.
- Ruthven, K. (1994). Better judgement: Rethinking assessment in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 27, 433-450.